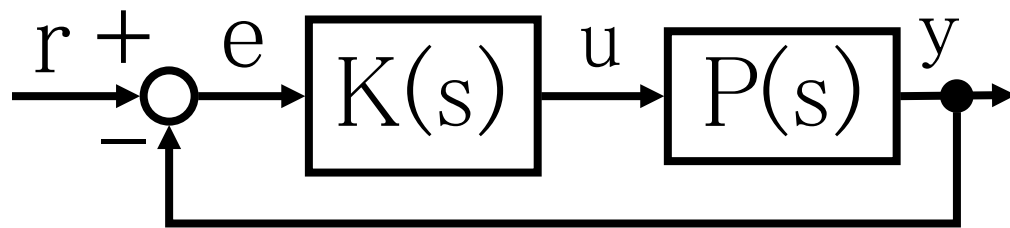


第12回

- ナイキスト軌跡
- ナイキストの安定判別

開ループ系と閉ループ系の関係



開ループ系(極: p_1, \dots, p_n):

$$L(s) = P(s)K(s) := \frac{N_o(s)}{D_o(s)} = \frac{N_o(s)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)}$$

閉ループ系(極: z_1, \dots, z_n):

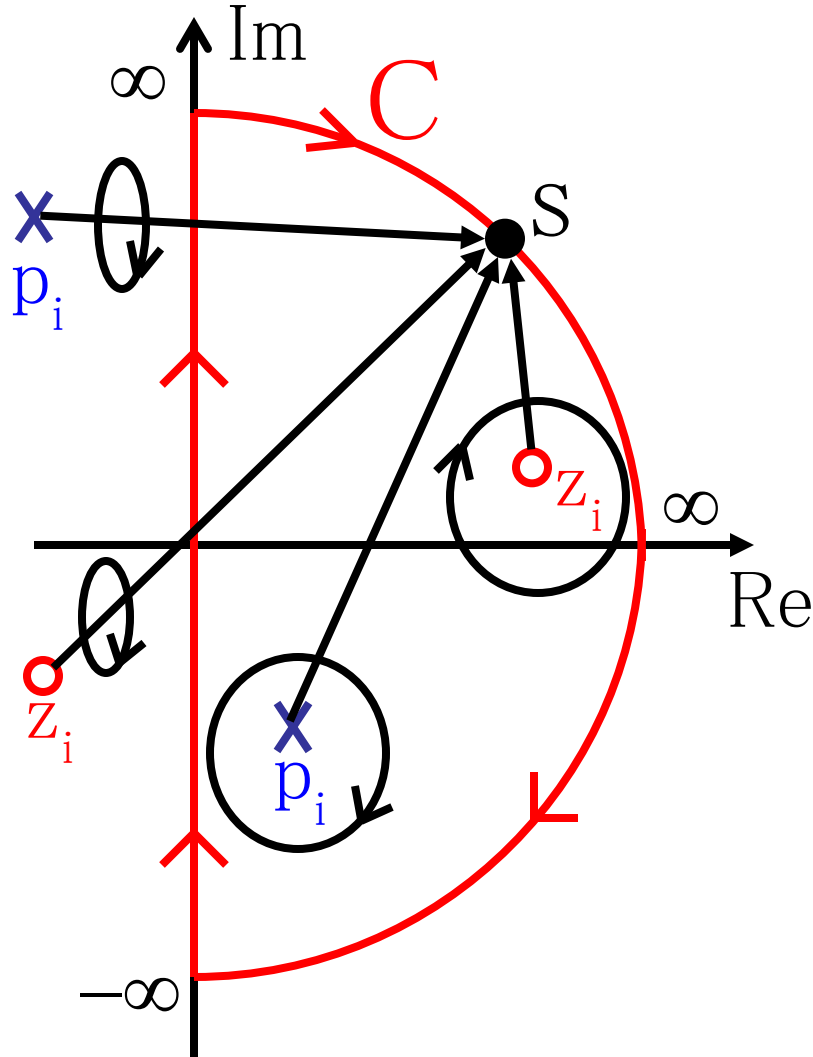
$$G_{yr}(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} = \frac{N_o(s)}{N_o(s) + D_o(s)} = \frac{N_o(s)}{(s - z_1) \cdots (s - z_n)}$$

$$\Rightarrow \underline{1 + L(s)} = 1 + P(s)K(s) = \frac{L(s)}{G_{yr}(s)} = \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_n)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)}$$

閉ループ系の極 = 「 $1 + L(s)$ 」の零点

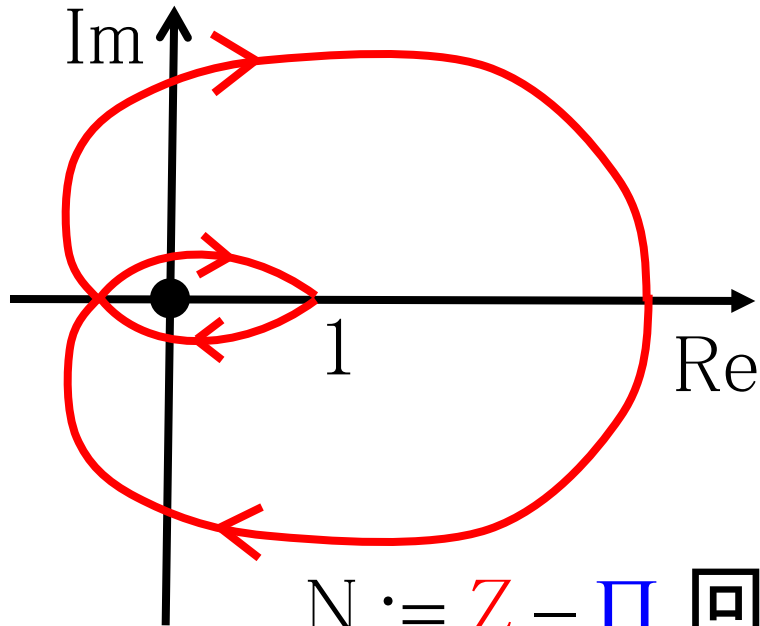
「 $1+L(s)$ 」の軌跡

「 s 」の軌跡



$$1 + L(s) = \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_n)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} \text{ の軌跡}$$

Z = 「右半平面の z_i の数」
 Π = 「右半平面の p_i の数」

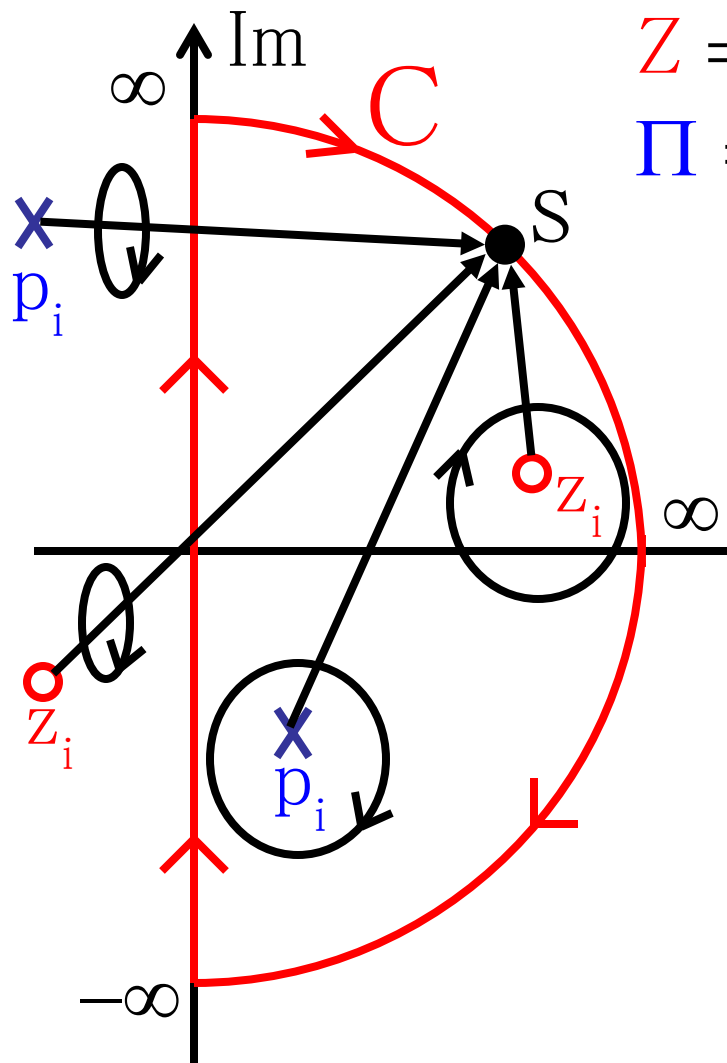


$N := Z - \Pi$ 回

原点を
時計方向に回る

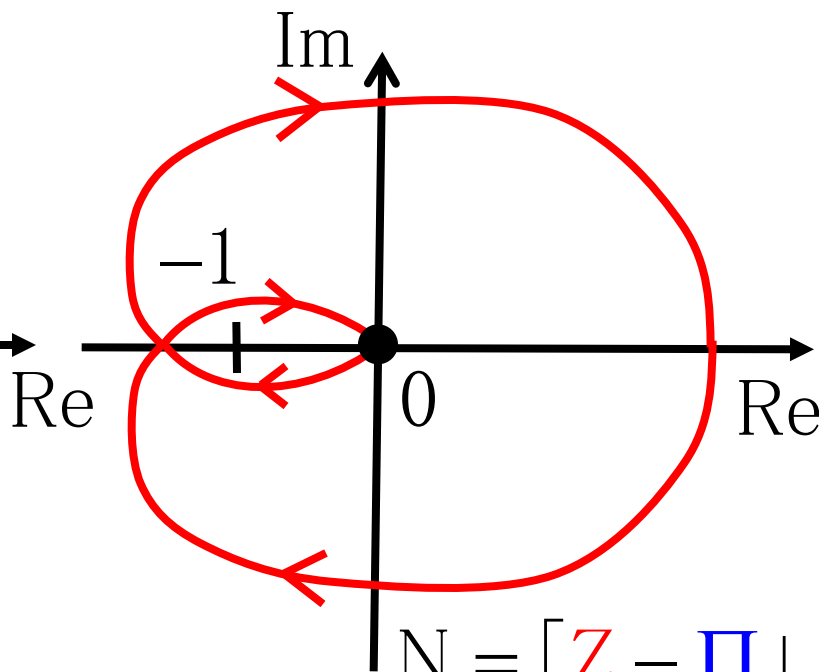
「L(s)」の軌跡 (ナイキスト軌跡)

「s」の軌跡



L(s) の軌跡

Z = 「閉ループ系の不安定極の数」
 Π = 「開ループ系の不安定極の数」



$N = 「Z - \Pi」$ 回
 (-1, 0) の点を
 時計方向に回る

ナイキストの安定判別法

ナイキスト軌跡

Z = 「閉ループ系の不安定極の数」

Π = 「開ループ系の不安定極の数」

$N = Z - \Pi$ $(-1,0)$ の点を時計方向に回る数

閉ループ系が安定 \iff 「 $Z = \Pi + N = 0$ 」

\iff 「 $\Pi = -N$ 」

安定条件

「開ループ系の不安定極の数」=

「ナイキスト軌跡が

点 $(-1,0)$ を反時計方向に回る数」

ナイキスト軌跡の利点

- 因数分解、ラウス数列などの計算が不要
- 視覚的に判別できる
- 周波数応答(実測データ)に基づき安定性判別
- 開ループ系に基づき閉ループ系の安定性判別
- 安定性の程度を評価できる
- 無駄時間を含む系に適用可能



制御系の設計に応用

ナイキスト軌跡

Jamox 0.9.5 (2009.6.4) Copyright (C) 2000-2009, mklab.org

ファイル(F) 編集(E) ブロック(B) シミュレーション(S) 線形解析(L) ウィンドウ(W) ヘルプ(H)

*FirstFirstFirst.jamox

- 伝達関数(T)
- 状態空間表現(数値)(S)
- 状態空間表現(数式)(E)
- 状態空間表現(キャンセル無し)
- 全システムの状態空間表現(数式)(E)
- ボード線図(B)
- ナイキスト線図**
- シグマプロット(G)
- ファイルへ保存

in 1 → $\frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ → out 1

ナイキスト軌跡のパラメータ設定

ナイキスト線図ビューア

線の幅、色、名前

4 L(s) 赤

10 緑

周波数範囲

最小: $10^{-2.0}$ -- 最大: $10^{2.0}$

分割数 1000

実軸範囲

最小: -2.0 -- 最大: 6.0

虚軸範囲

最小: -4.0 -- 最大: 4.0

グリッド

グリッド間隔

実軸 1.0

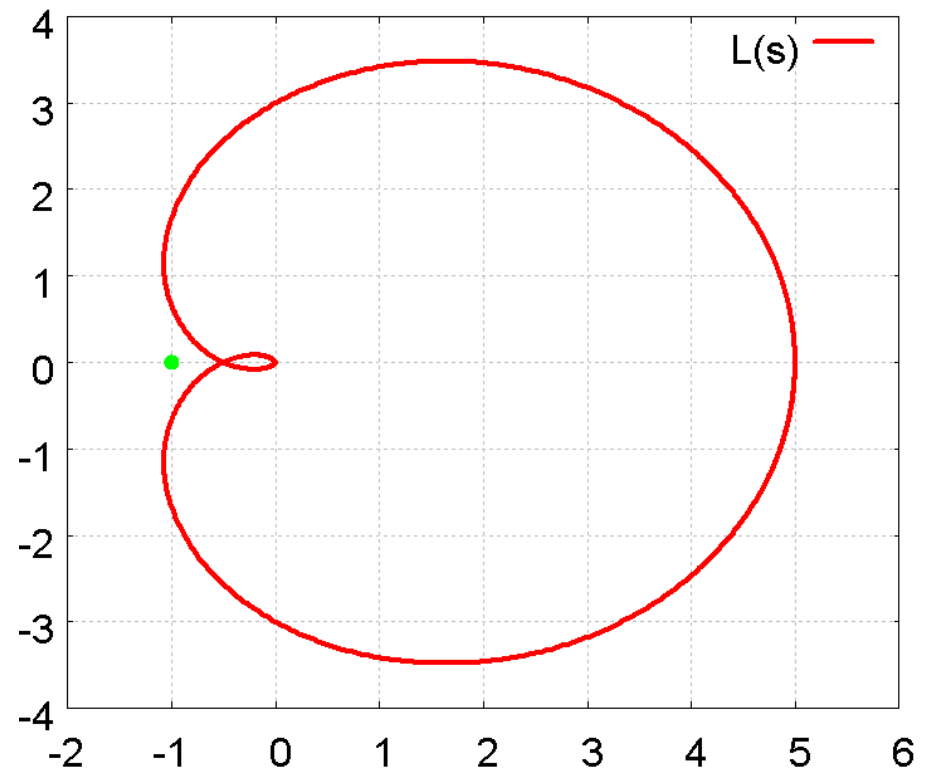
虚軸 1.0

フォントの大きさ

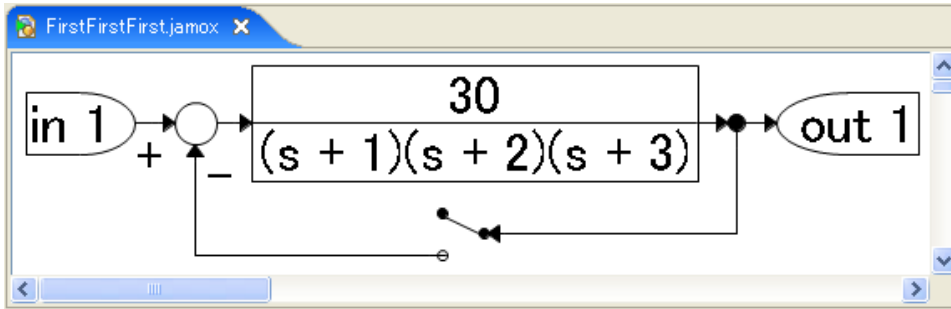
フォントの大きさ 24

閉じる

点(-1,0)を表わす円



ナイキストの安定判別(例)



開ループ系の極:

$$\{-1, -2, -3\} \quad \Pi = 0$$

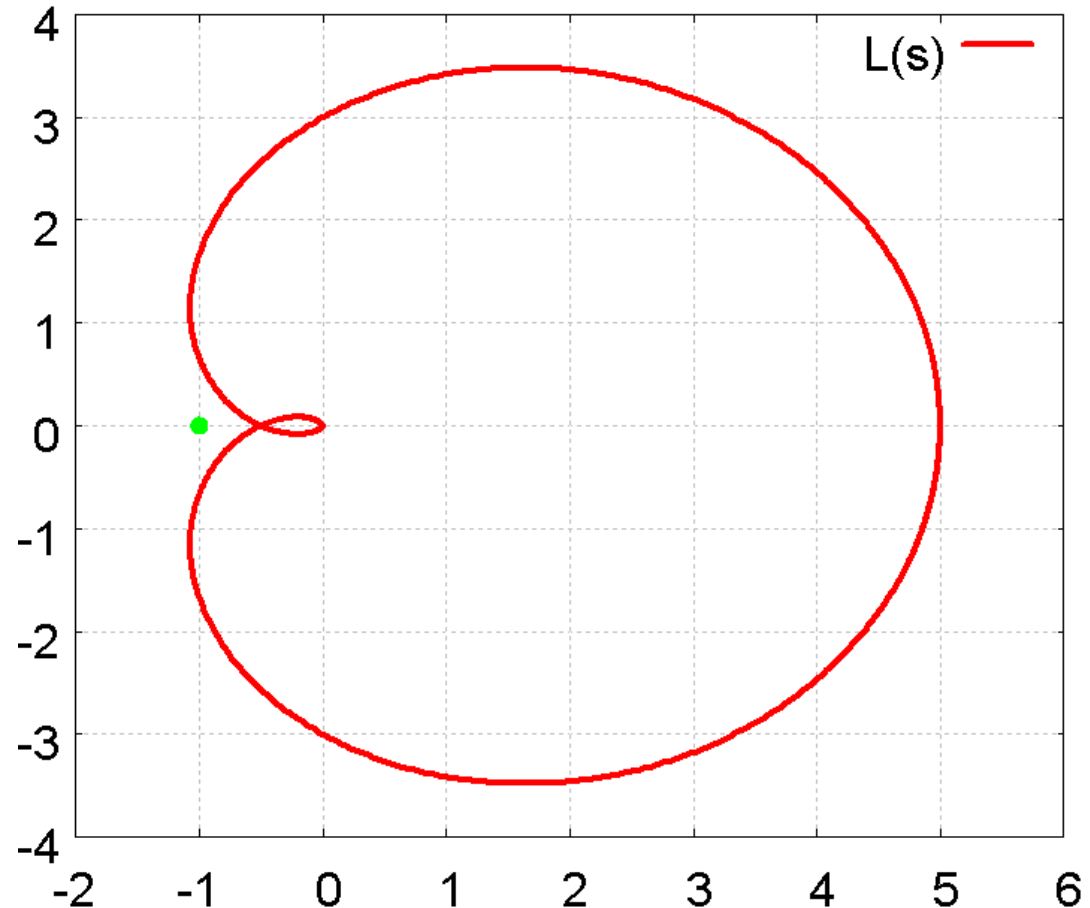
点(-1,0)を回る数:

$$N = 0$$

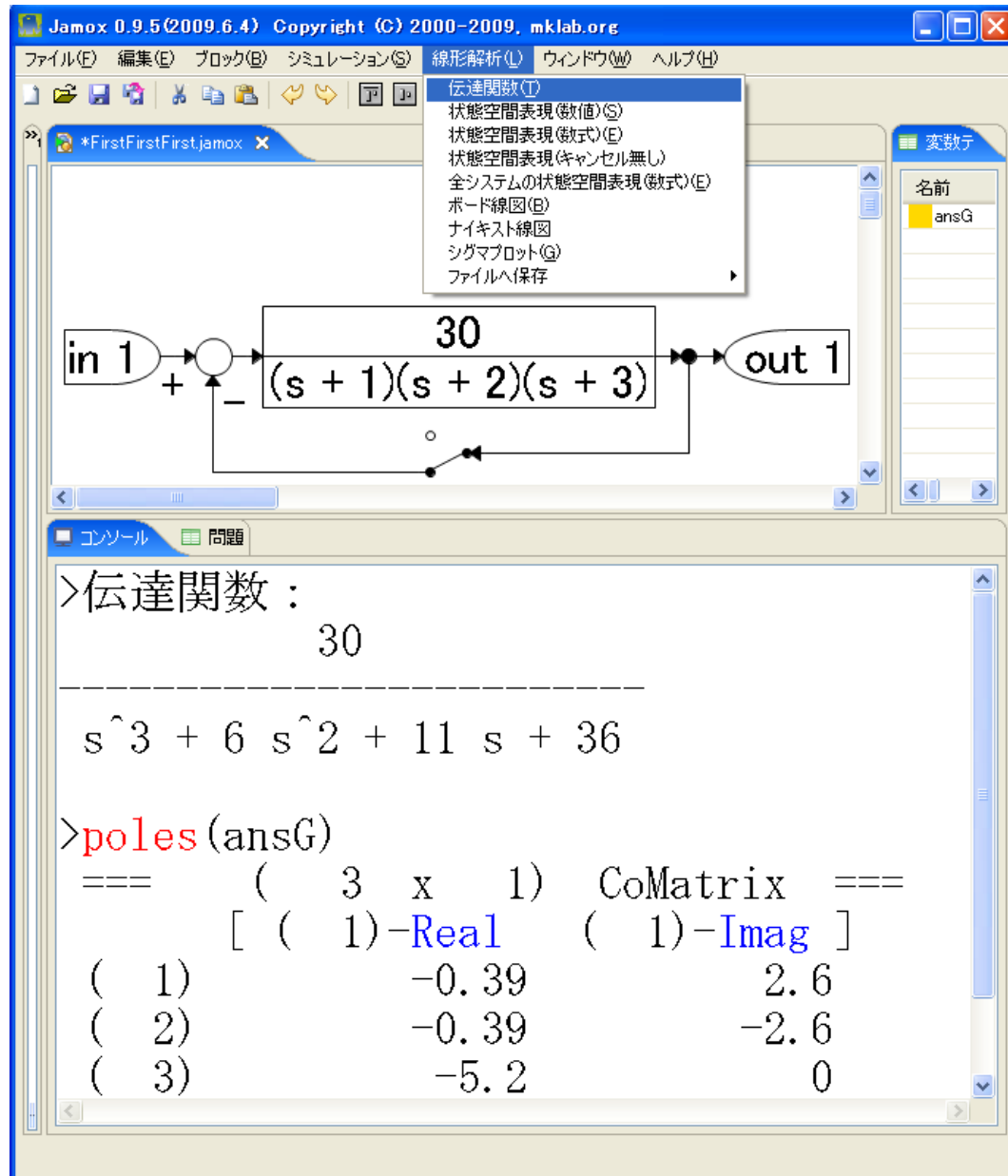
閉ループ系の
不安定極の数:

$$Z = \Pi + N = 0$$

安定



閉ループ系の極による安定性の確認

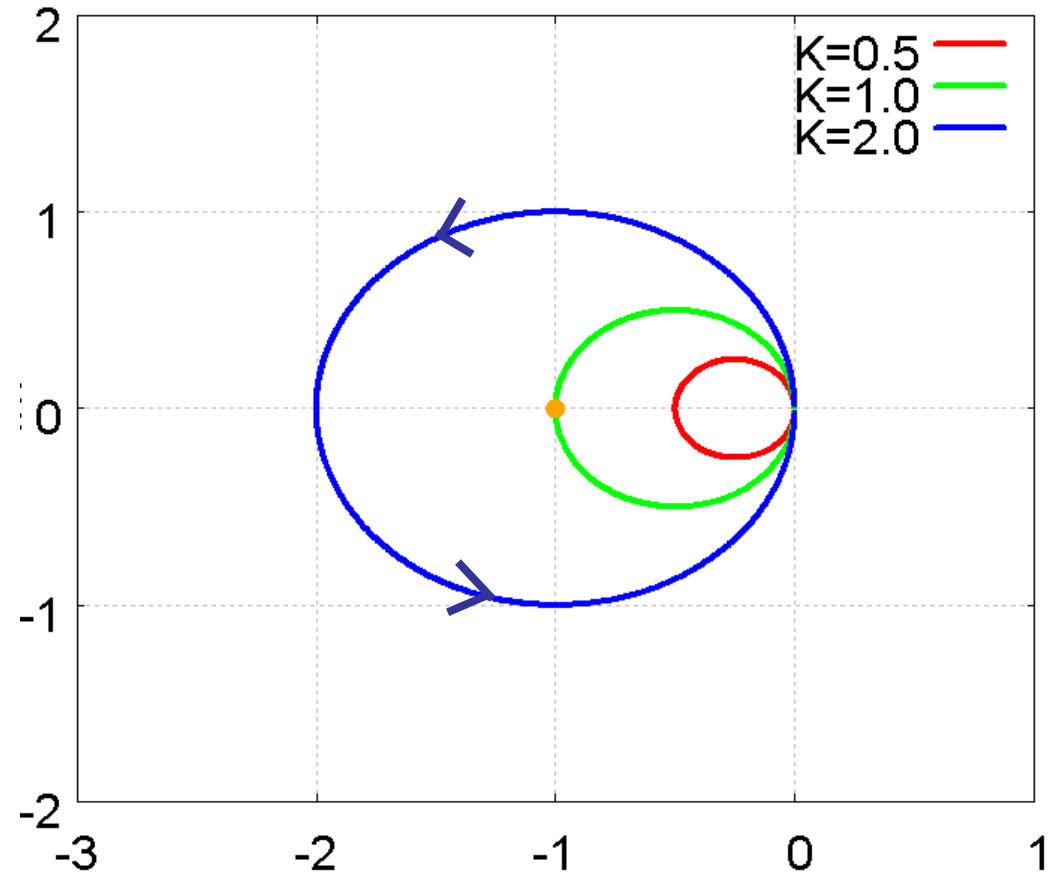
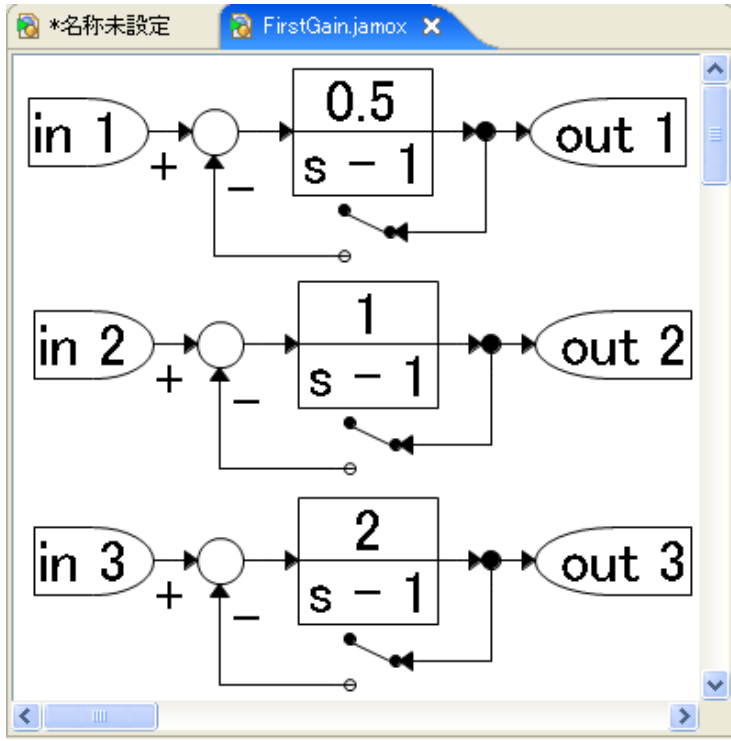


The screenshot shows the Jamox software interface. The main window displays a block diagram of a closed-loop system. The input is labeled "in 1" and the output is labeled "out 1". The transfer function of the system is $\frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3)}$. A feedback loop is shown with a gain of 1. A context menu is open over the transfer function block, listing various analysis options such as "伝達関数(T)", "状態空間表現(数値)(S)", "状態空間表現(数式)(E)", "状態空間表現(キャンセル無し)", "全システムの状態空間表現(数式)(E)", "ボード線図(B)", "ナイキスト線図", "シグマプロット(G)", and "ファイルへ保存".

The console window at the bottom shows the following output:

```
>伝達関数 :  
          30  
-----  
s^3 + 6 s^2 + 11 s + 36  
  
>poles(ansG)  
===      ( 3 x 1) CoMatrix  ===  
      [ ( 1)-Real  ( 1)-Imag ]  
( 1)      -0.39      2.6  
( 2)      -0.39     -2.6  
( 3)      -5.2       0
```

ナイキストの安定判別(例)



$$\Pi = 1$$

$$K = 0.5 : N_1 = 0$$

$$Z_1 = \Pi + N_1 = 1$$

不安定

$$K = 1.0 : N_2 = 0$$

$$Z_2 = \Pi + N_2 = 1$$

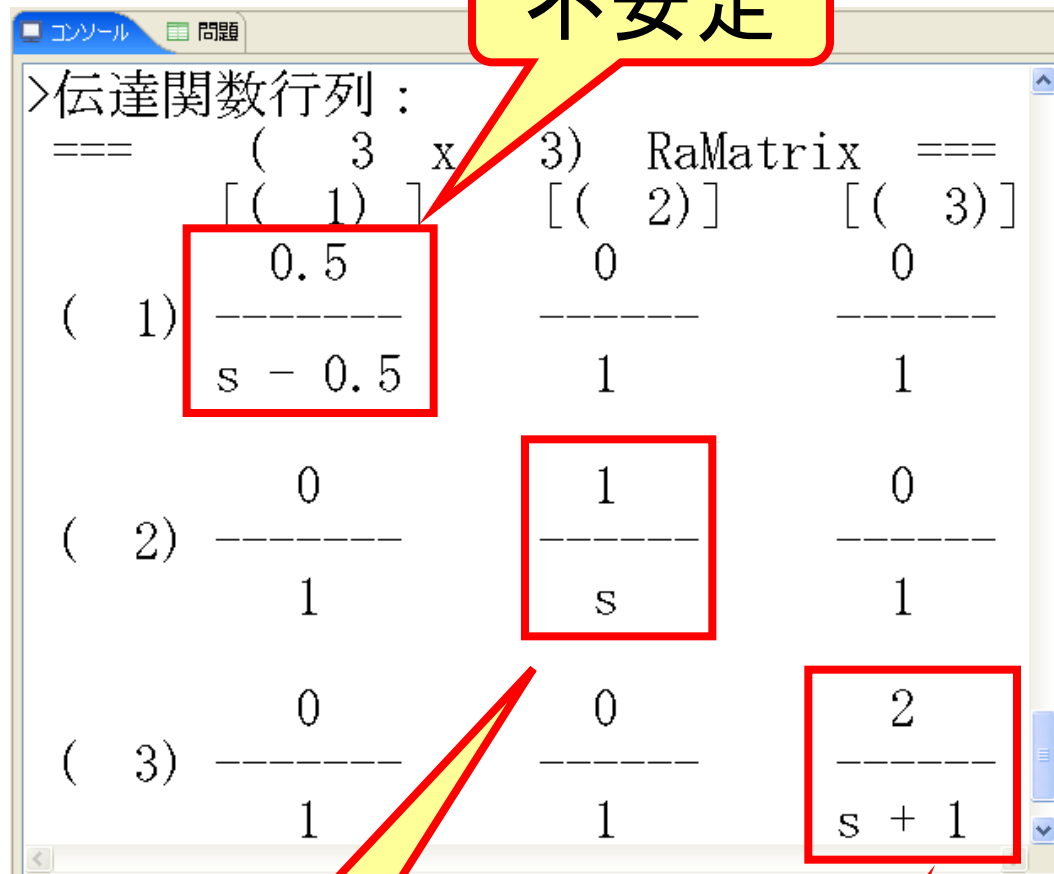
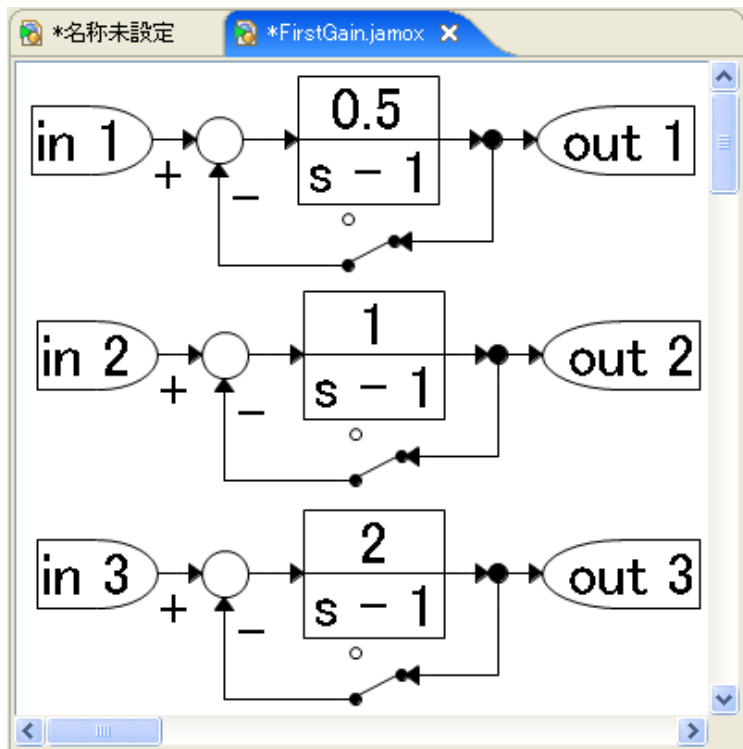
安定限界

$$K = 2.0 : N_3 = -1$$

$$Z_3 = \Pi + N_3 = 0$$

安定

閉ループ系の極による安定性の確認



演習1: ナイキストの安定判別

- 開ループ伝達関数が以下のように与えられるとき、ナイキスト軌跡を描き、閉ループ系の安定性を調べよ。また、閉ループ系の極を求め、安定性を確認せよ。

$$(1) \quad L(s) = \frac{100}{(s+1)^2(s+10)}$$

$$(2) \quad L(s) = \frac{2}{(s+1)^3(s-1)}$$

$$(3) \quad L(s) = \frac{4(s+3)^2}{(s+1)(s^2-2s+2)}$$

演習2: ナイキストの安定判別

- 開ループ伝達関数が以下のように与えられるとき、ナイキスト軌跡を描き、閉ループ系が安定となるゲイン ($K > 0$) の範囲を求めよ。

$$L(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$